2016

Ασκηση 1

$S: z = xy$

Να εξετάσετε αν είναι ευθειογενής και αναπτυκτή

ΛΥΣΗ

Κανονική επιφάνεια όπως επιφάνεια γράφημα της $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = xy$ καλύπτεται από το συστ. συντ/νων $X: \mathbb{R}^2 \to S$, $X(u,v) = (u, v, u \cdot v)$

$X(u,v) = (u,0,0) + (0, v, u \cdot v) = (u,0,0) + v(0,1,u)$

$X(u,v) = c(u) + v\,w(u)$ όπου $c(u) = (u,0,0)$

και $w(u) = (0,1,u) \neq (0,0,0)$

Τότε η S ευθειογενής

Υπάρχει και μια 2η οικογένεια ευθειών

$X(u,v) = (0,v,0) + u(1,0,v)$ οπου δεν ταυτίζονται με τις προηγούμενες!

Άρα, η S διπλά ευθειογενής

Η S ως γράφημα της f έχει καμπυλότητα Gauss:

$$K = \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2} = \frac{-1}{(1+x^2+y^2)^2} < 0$$

Άρα αφού $K \neq 0 \Rightarrow$ S όχι αναπτυκτή

Ασκηση 2

Δίνεται η παραμετρική επιφάνεια

$X: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με $X(u,v) = (\alpha(u+v), b(u-v), uv)$ $\alpha, b > 0$

i) Είναι ευθειογενής;

ii) Είναι αναπτυκτή;

iii) Ποιες οι γραμμές καμπυλότητας;

iv) Ποιες οι ασυμπτωτικές γραμμές;

ΛΥΣΗ

$X_u = (\alpha, b, v)$, $X_v = (\alpha, -b, u) \Rightarrow X_u \times X_v =$
$= (bu + bv, -\alpha u + \alpha v, -2ab) \neq 0 \to X$ κανονική

<u>1η ΘΕΜΕΛ. ΜΟΡΦΗ:</u>

$E = \|X_u\|^2 = \alpha^2 + b^2 + v^2$

$F = \langle X_u, X_v \rangle = \alpha^2 - b^2 + uv$

$G = \|X_v\|^2 = \alpha^2 + b^2 + u^2$

<u>2η ΘΕΜΕΛ. ΜΟΡΦΗ:</u>

$e = \langle X_{uu}, N \rangle = 0 = g$

$f = -\dfrac{2\alpha b}{\|X_u \times X_v\|}$

i) $X(u,v) = (\alpha u, bu, 0) + (\alpha v, -bv, uv) =$
$= \underbrace{(\alpha u, bu, 0)}_{c(u)} + v\,\underbrace{(\alpha, -b, u)}_{w(u) \neq \vec{0}} \Rightarrow$ Ευθειογενής

ii) $K = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\dfrac{(\ )^2}{\dots} < 0 \Rightarrow$ μη αναπτυκτή

iii) Η επιφανειακή καμπύλη $c(t) = X(u(t), v(t))$ είναι γραμμή καμπυλότητας αν.ν.

$$\begin{vmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ \cancel{e}^{\,0} & f & \cancel{g}^{\,0} \end{vmatrix} = 0$$

$E = E(u(t), v(t))$
$G = G(u(t), v(t))$
$F = F(u(t), v(t))$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow (u')^2(\alpha^2 + b^2 + v^2) - (v')^2(\alpha^2 + b^2 + u^2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(u'\sqrt{\alpha^2+b^2+v^2} - v'\sqrt{\alpha^2+b^2+u^2}\right)\left(u'\sqrt{\alpha^2+b^2+v^2} + v'\sqrt{\alpha^2+b^2+u^2}\right) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} u'\sqrt{\alpha^2+b^2+v^2} = v'\sqrt{\alpha^2+b^2+u^2} \\ \text{ή} \\ u'\sqrt{\alpha^2+b^2+v^2} = -v'\sqrt{\alpha^2+b^2+u^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{u'}{\sqrt{\alpha^2+b^2+u^2}} = \dfrac{v'}{\sqrt{\alpha^2+b^2+v^2}} \\ \dfrac{u'}{\sqrt{\alpha^2+b^2+u^2}} = -\dfrac{v'}{\sqrt{\alpha^2+b^2+v^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{u}{\sqrt{\alpha^2+b^2}}\right)'}{\sqrt{1+\left(\frac{u}{\sqrt{\alpha^2+b^2}}\right)^2}} = \pm \frac{\left(\frac{v}{\sqrt{\alpha^2+b^2}}\right)'}{\sqrt{1+\left(\frac{v}{\sqrt{\alpha^2+b^2}}\right)^2}} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \operatorname{arsinh} \dfrac{u}{\sqrt{\alpha^2+b^2}} = \pm \operatorname{arsinh} \dfrac{v}{\sqrt{\alpha^2+b^2}} + C \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha v \cdot \sinh \dfrac{u}{\sqrt{\ }} = \alpha v \cdot \sinh \dfrac{v}{\sqrt{\ }} + c_1 & (I) \Rightarrow v(t) = \dots \\ \alpha v \sinh \dfrac{u}{\sqrt{\ }} = -\alpha v \sin \dfrac{v}{\sqrt{\ }} + c_2 & (II) \Rightarrow u(t) = \dots \end{cases}$$

$(I): \; c(t) = X(u(t), v(t)) \xlongequal{u(t)=t} X(t, v(t))$

$(II): \; c(t) = X(u(t), v(t)) \xlongequal{v(t)=t}$

iv) $c(t) = X(u(t), v(t))$ ασυμπτωτική καμπύλη αν

$\underset{0}{e}(u')^2 + 2 f u'v' + \underset{0}{g}(v')^2 = 0 \underset{f\neq 0}{\Rightarrow} u'v' = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = \text{σταθ} \\ v = \text{σταθ} \end{cases}$

Οι παραμετρικές καμπύλες είναι οι ασυμπτωτικές καμπύλες.

<u>β' τρόπος</u> (για την ευθειογενή)

σταθ $= u \to X(\text{σταθ}, v) =$ γραμμική

σταθ $= v \to X(u, \text{σταθ}) =$ γραμμική

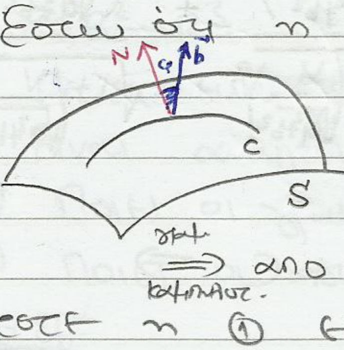
Οι παραμετρικές γραμμές είναι ευθείες

<u>Άσκηση 3</u>

Έστω c γραμμή καμπυλότητας μιας κανονικής επιφάνειας S. Αν η c έχει $k>0$ παντού το κύριο κάθετο της δεν εφάπτεται σε κανένα σημείο της S και το δεύτερο κάθετο σχηματίζει σταθερή γωνία με το εφαπτόμενο επίπεδο της S τότε η c είναι επίπεδη.

<u>Λύση</u>

Έστω ότι η c έχει παράμετρο το μήκος τόξου



$\langle N\circ c(s), \vec{b}(s)\rangle = \text{σταθ} = \cos\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle N\circ c(s), \vec{b}(s)\rangle^{\circ} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle (N\circ c)^{\circ}(s), \vec{b}(s)\rangle + \langle N\circ c(s), \mathring{\vec{b}}(s)\rangle = 0$ ①

$\xRightarrow[\text{καμπυλ.}]{\text{γρ.}}$ από Θ. Rodrigues $\Rightarrow (N\circ c)^{\circ}(s) = \lambda(s)\mathring{c}(s) = \lambda(s)\cdot\vec{T}(s)$

τότε η ① είναι: (Frenet 3^{η} εξίσωση)

$\xrightarrow{\quad} 0$

$< \cancel{\lambda(s)\vec{t}(s), \vec{b}(s)} > + < No(t), -\tau(s)\cdot\vec{n}(s) > = 0 \Longrightarrow$

$\tau(s) < No(s), \vec{n}(s) > = 0 \xrightarrow[\text{δεν εφαπτεται στην } S]{\text{το δευτερο κομμάτι}} \tau(s) = 0 \ \forall s \Rightarrow$

$\Rightarrow S$ επίπεδη

Άσκηση 4 (SOS)

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λεία συνάρτηση

Θεωρούμε την παραμετρική επιφάνεια $x: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$X(u,v) = (u - f(u-v), u, v)$

ΝΔΟ

i) X κανονική

ii) όλα τα εφαπτόμενα επίπεδα // σε σταθ. διάνυσμα

ΛΥΣΗ

i) $X_u(u,v) = \left(1 - f'(u-v)\dfrac{\partial(u-v)}{\partial u}, 1, 0\right) = (1 - f'(u-v), 1, 0)$

$X_v(u,v) = \left(0 - f'(u-v)\dfrac{\partial(u-v)}{\partial v}, 0, 1\right) = (f'(u-v), 0, 1)$

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1-f'(u-v) & 1 & 0 \\ f'(u-v) & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(1, -\begin{vmatrix} 1-f'(u-v) & 0 \\ f'(u-v) & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1-f'(u-v) & 1 \\ f'(u-v) & 0 \end{vmatrix}\right)$$

$= (1, -1 + f'(u-v), -f'(u-v)) \neq (0,0,0) \Rightarrow$

$\Rightarrow X$ είναι κανονική

ii) Θέλω νδο $X_u \times X_v \perp \vec{n} =$ σταθ. διαν.

Παρατηρώ ότι το άθροισμα των συντεταγμένων του $X_u \times X_v$ μας κάνει 0.

Πρόσθεση ++ Άρα $\vec{n} = (1,1,1)$ ώστε $< X_u \times X_v, \vec{n} > = 0$.

Μετά,

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\| X_u \times X_v \|} = \frac{(1, -1 + f'(u-v), -f'(u-v))}{\sqrt{2 + 2f'(u-v)^2 - 2f'(u-v)}}$$

1η Θ.Μ: $E = \|X_u\|^2 = (1 - f'(u-v))^2 + 1$

$F = < X_u, X_v > = f'(u-v)(1 - f'(u-v))$

$G = \|X_v\|^2 = 1 + (f'(u-v))^2$

2η Θ.Μ:

$e = \langle X_{uu}, N \rangle = (1/\|X_u \times X_v\|) \cdot \langle X_{uu}, X_u \times X_v \rangle = \dfrac{-f''(u-v)}{\|X_u \times X_v\|}$

$f = \langle X_{uv}, N \rangle = f''(u-v)/\|X_u \times X_v\|$

$g = \langle X_{vv}, N \rangle = -f''(u-v)/\|X_u \times X_v\|$

$k = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0 \Rightarrow$ όλα τα σημεία παραβολικά ή επίπεδα.

Το σημείο $X(u,v)$ είναι επίπεδο $\Leftrightarrow f''(u-v) = 0$

τότε σίγουρα θα είμαστε σε επίπεδο

Εάν $f''(u-v) \neq 0 \Rightarrow$ Παραβολικά σημεία $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Η επιφάνεια είναι ευθειογενής

Άλλος τρόπος εξέτασης ευθειογένειας είναι να θέσουμε $u-v = \tilde{u}$ (αναπαραμέτρηση)

και $v = \tilde{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ (γραμμικός ισομορφισμός

θα πρέπει να είναι διαφορομορφισμός η αναπαραμέτρηση προφανώς)

Έτσι, $X(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{u} + \tilde{v} - f(\tilde{u}), \tilde{u} + \tilde{v}, \tilde{v}) =$

$= \underbrace{(\tilde{u} - f(\tilde{u}), \tilde{u}, 0)}_{c(\tilde{u})} + \tilde{v} \underbrace{(1,1,1)}_{\vec{w}(\tilde{u})}$

Άρα, είναι ευθειογενής επιφάνεια

Είναι και Αναπτυκτή επιφάνεια

Πρόκειται για κυλινδρική επιφάνεια οι γενέτειρες $\parallel (1,1,1)$

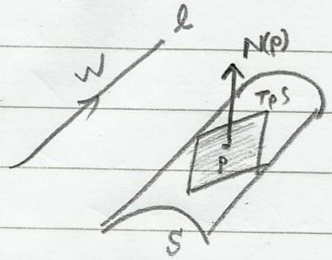
Σχόλιο: Η X είναι γράφημα και μάλιστα γραμμένο στη μορφή

$X = X(u,v) = (g(u,v), u, v)$

Άσκηση 5

Έστω S κανονική επιφάνεια. Αν όλα τα εφαπτόμενα επίπεδα της S είναι παράλληλα προς μία σταθερή ευθεία τότε η καμπυλότητα Gauss της S είναι $K=0$

ΛΥΣΗ



Έστω $w \parallel \ell$, $w \neq 0$ και $\ell \parallel T_pS$

Τότε έχω εξ υποθέσεως

$<N(p), w> = 0, \ \forall p \in S$

Δηλ. η $h: S \to \mathbb{R}$ με $h(p) = <w, N(p)>$ είναι ίση με μηδέν.

Τότε $dh_p: T_pS \to \mathbb{R}$ για $w \in T_pS \to \exists\, c:(-\varepsilon,\varepsilon) \to S$ με $c(0)=p$ και $c'(0)=w_1$ τότε

$dh_p(w_1) = (h\circ c)'(0) = <w, (N\circ c)'(0)> = 0$ (υπόθεση)

Από την άλλη

$dh_p(w_1) = <w, dN_p(w_1)> = <w, -L_p w_1> = -<w, L_p w_1>$

δηλ. $<w, L_p w_1> = 0, \ \forall w_1 \in T_pS$

όπως αυτοπροσαρτημένος γραμμ. μετασχηματισμός

$<w, L_p w_1> = <L_p w, w_1>, \ \forall w_1 \in T_pS \Longrightarrow$

$\Longrightarrow L_p w = 0$ άρα έχει ιδιοτιμή k_1 ή $k_2 = 0$

και άρα $K = \det L_p w = 0$.